

离散数学

研究对象：离散

- 1. 有限/可数 $\longrightarrow$ 集合. (本课从具体的对象出发, 逐渐“抽象”)
- 2. 对象间存在关系 $\longrightarrow$ 特殊: 二元关系
- ★ 常见离散对象 $\left\{ \begin{array}{l} \text{整数} \longrightarrow \text{数论} \longrightarrow \text{代数结构} \\ \text{图} \longrightarrow \text{图论} \end{array} \right.$

研究内容：满足一定条件

- 1. 有没有 : 存在性/构造性. (抽屉原理, 图染色 ...)
- 2. 有多少 : 计数/唯一性 (排列组合, 容斥原理, Mobius反演)
- 3. 找最优 : 优化问题 (最优数, 最大匹配 (完美匹配))

引入

抽屉原理: $n+1$ 个物品, n 个抽屉, 一定存在一个抽屉中至少放 2 个物品

eg: $n+1$ 个正整数, 一定存在两个数, 它们模 n 的余数是相同的

↓ 抽屉: 模 n 的余数: $0, 1, \dots, n-1$

一定存在 2 个数, 模 n 同余

eg: $a_1 \dots a_n \in \mathbb{N}$, 证 $\exists k, l \ (1 \leq k < l \leq n)$ st. $\sum_{i=k}^l a_i$ 被 n 整除

$$\left\{ \begin{array}{l} s_0 = 0 \\ s_1 = a_1 + 0 \\ s_2 = a_2 + 0 \\ \vdots \\ s_n = \sum_{i=1}^n a_i + 0 \end{array} \right.$$

$n+1$ 个数 $\searrow$ 模 n 的余数: n 个

一定有两个数, 模 n 同余

$$\exists s_k, s_l \text{ st. } (s_l - s_k) \% n = 0 \Leftrightarrow n \mid (s_l - s_k) \quad (\text{记作})$$
$$k+1 = l \Rightarrow n \mid \sum_{i=k}^l a_i$$

同学每天至少打一局游戏, 但每周至多打 12 局游戏. 一共打 377 天 (11 周)

证: 一定存在若干连续天, 其中共打 21 场

$a_i \geq 1 \ i \in [77]$, $\frac{7t}{7(t+1)} a_t \leq 12 \ \forall t \in [77]$ 证 $\exists 1 \leq k \leq l \leq 77$ st $\sum_{i=k}^l a_i = 21$ ^m

$$\left\{ \begin{array}{l} s_0 = 0 \\ s_1 = a_1 \\ \vdots \\ s_{77} = \sum_{i=1}^{77} a_i \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} ① \ 21 \mid \sum_{i \in S} a_i \\ ② \ \sum_{i \in S} a_i < 21 \times 2 \end{array} \right. \Leftrightarrow 21 = \sum_{i \in S} a_i$$

$|S| > 21 \Rightarrow \sum_{i \in S} a_i > 21$, 肯定不行

先取 $l_0 - k_0 + 1 = 21$ ($|S| = 21$)

$$21 \leq \sum_{i=k_0}^{l_0} a_i \leq 12 \times 3 = 36 < 42$$

21 个数 $\Rightarrow$ 见题 2

其中存在连续几个数可以被 21 整除 $\Rightarrow \exists k_0 \leq k \leq l \leq l_0$
且这几个数之和为 21 $\sum_{i=k}^l a_i = 21$

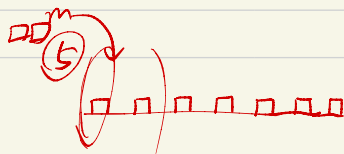
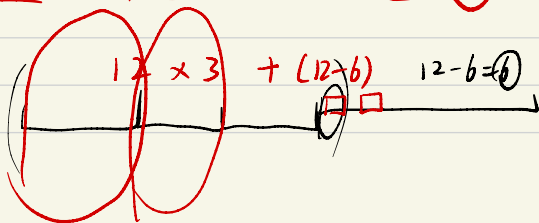
更一般的:

$a_i \geq 1 \ i \in [77]$, $\frac{7t}{7(t+1)} a_t \leq 12 \ \forall t \in [77]$ 证 $\exists 1 \leq k \leq l \leq 77$ st $\sum_{i=k}^l a_i = m$

$\exists 1 \leq k \leq l \leq 77$ st $m \mid a_k + \dots + a_l < 2m$

$$M_{\max} = 42 < 44$$

eg: 22 天: $22 \leq a_{k_0} + \dots + a_{l_0} \leq M < 22 \times 2$



m 局 $\Rightarrow$ 先取 m 天:

$$\frac{m}{7} \leq \sum_{i=1}^{70} a_i \leq \boxed{\text{★}} < 2m$$

整周

"剩下几天尽可能多打"

这里可以有"更优"的表达式

$$\Rightarrow \frac{12}{7}m + 5 < 2m$$

$$5 < \frac{2}{7}m \Rightarrow m > \frac{35}{2} = 17.5$$

即: 只要 $18 \leq m \leq 77$, 均有连续几天, 共打 m 把。

②: $a_i \geq 1 \ i \in [77]$, $\frac{7t}{7(t-1)} a_i \leq 12 \ \forall t \in [7]$ 证 $\exists 1 \leq k \leq 77$ st $\sum_{i=k}^m a_i = 21$

78个

$$\begin{cases} s_0 = 0 \\ s_1 = a_1 \\ \vdots \\ s_{77} = \sum_{i=1}^{77} a_i \end{cases}$$

78个

$$\begin{cases} s_0 + 21 \\ s_1 + 21 \\ \vdots \\ s_{77} + 21 \end{cases}$$

s_1, s_2 中均互异

$(m \leq 21)$

156个数

$$0 \leq s_i \leq 12 \times 11 + 21 = 153$$

$0 \leq s_i \leq 153$ 共 154 个
 $\searrow$ 156 个数

$\Rightarrow$ 有相等

即: $\exists k, l$ st $s_{k+21} = s_l$

若 $m < 21 \Rightarrow \{s_i\}$ 上界 < 153 , "更有3"

且 $\forall m \in [77]$ 均可找到连续几天共玩 m 局游戏。