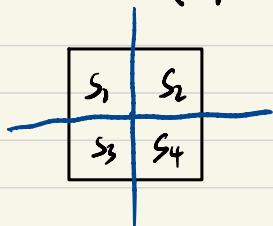


构造抽屉的两个角度: $\left\{ \begin{array}{l} \text{优化的角度} \\ \text{反问题的角度} \end{array} \right.$

eg: 一个边长为1的正方形中任取5个点,
则它们之间一定存在两点, 其距离小于 m , 问 m 最小是多少

① 直接尝试构造抽屉



将正方形 S 分成4个小正方形
先取 S 的4个顶点
第5个点一定会落在其中一个正方形中 (抽屉原理)

$$\Rightarrow \exists i \in [4], d(a_5, a_i) \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$$

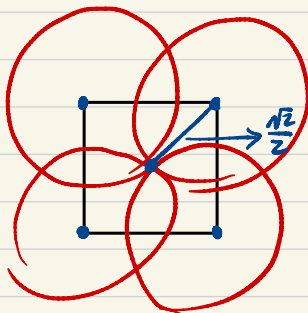
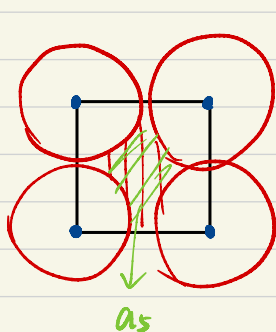
$$\text{且取4个顶点及中点时, 可取到 } \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow m = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

② 优化的角度: 让这些点尽可能远

$\max_{x_1, \dots, x_n \in S}$
↓
构造策略

$\min d(x, y), x, y \in \{x_1, \dots, x_5\}$
↓
求出最短距离

→ 加强短板.



eg: 在 $1 \sim 200$ 个数中任取 m 个数, 使得其中一定存在两个数 a, b 有 整除关系
 m 最小可以是多少?

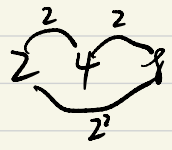
反问题: 在 $1 \sim 200$ 中取若干数 ^{$m-1$!} 使它们之间不存在整除关系, ^{t} 最多可以取多少个. $t+1=201$

从整除关系出发去构造抽屉! 余为 $\checkmark$ 目标: 构造尽可能多的抽屉.

S_i : $\forall a, b \in S_i, a, b$ 间均存在整除关系.

$\checkmark$ 选择一个基因子 l $a \cdot b \rightarrow a = b \cdot l^i \ i \geq 1$

基因子越大, 抽屉数取得越多. $\rightarrow$ 取 2 : $\forall a, b \in S, a = b \cdot 2^i$



101 102 103 104 ...

196	197	198	199	200
98		99		100
49				50
				25

构造了 100 个抽屉, 且对 $\forall$ 抽屉 $T, \forall a, b \in T, a, b$ 间均存在整除关系.

$\downarrow$
 m 最小为 101, 若是 101 个, 必有 2 个数存在于同一抽屉中, 他们之间存在整除关系.

两边去

eg: 在 $1 \sim 200$ 个数中任取 m 个数, 使得其中一定存在两个数 a, b 有整除关系
 m 最小可以是多少?

反问题: 在 $1 \sim 200$ 中取若干数 ^{$m-1$!} 使它们之间不存在整除关系, 最多可以取多少个.

case 1 100 个数时: 直接取 $101 \sim 200$, 此时共 100 个数且任两个数间均不存在整除关系.

case 2: 101 个数: 取 100 个奇数.

$$\forall x \in [200], x = k \cdot 2^i \quad \left\{ \begin{array}{l} k = 2l+1 \quad (k \in \text{Odd}) \quad l: 0 \sim pp \\ i \in \mathbb{N}^+ \end{array} \right.$$

若取 101 个数, 至少存在两个数对应同一个奇数

$$a \quad b \quad \rightarrow \quad a = l_0 \cdot 2^{i_1} \quad b = l_0 \cdot 2^{i_2}$$

此时, 这两个数存在整除关系

综上, m 最小取 101.