$\lceil\ \rceil$: 向上取整
$\lfloor\ \rfloor$: 向下取整.

抽屉原理的其他形式:

强抽屉原理

· n个物品放入m个抽屉中,则一定存在一个抽屉,其中至少有$\lceil \frac{n}{m} \rceil$个物品.

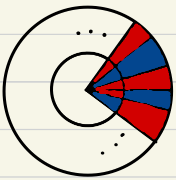
特别地, $n=km+1$, 则一定存在一个抽屉,其中至少有$k+1$个物品.

反证.

· 若 $x_1+x_2+\cdots+x_m = y_1+y_2+\cdots+y_m$, 则 $\exists\, i\in[m]$, s.t $x_i\ge y_i$

若 $x_1+x_2+\cdots+x_m = y_1+y_2+\cdots+y_m+1$. 则 $\exists\, i \in [m]$, s.t $x_i \ge y_i+1$.

eg: 大小圆盘,各均分成200个扇形,染红、蓝两种颜色各100个,
证 固定染色方案后,一定存在某个位置,s.t 大小圆盘在至少100个扇形上同色



令红色为1,蓝色为-1,关系用乘积表示 $\begin{cases} \text{乘积为1表示同色} \\ -1\ \ \text{异色} \end{cases}$

目标:存在某个位置,将所有乘积累加,结果 ≥ 0,则命题得证

小扇形: $a_1 \sim a_{200}$
大扇形 $b_1 - b_{200}$

① $a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_{199}b_{199} + a_{200}b_{200} = S_1$

② $a_1b_2 + a_2b_3 + \cdots + a_{199}b_{200} + a_{200}b_1 = S_2$

⋮

(200) $a_1b_{200} + a_2b_1 + \cdots + a_{199}b_{198} + a_{200}b_{199} = S_{200}$

目标: $\exists\, i\in[200]$, s.t $S_i \ge 0$

转化: $S_1+S_2+\cdots+S_{200} = 0+\cdots+0=0$

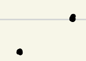
$= a_1\cdot\sum_1^{200} b_i + a_2\cdot\sum_1^{200} b_i + \cdots = 0$

由抽屉原理, $\exists\, i$ s.t $S_i\ge 0$. 即存在一个位置,此时大小扇形对应位置同色数 ≥ 100

eg: n^2+1个互异的数构成的数列中,一定存在长为$n+1$的递增/递减子列

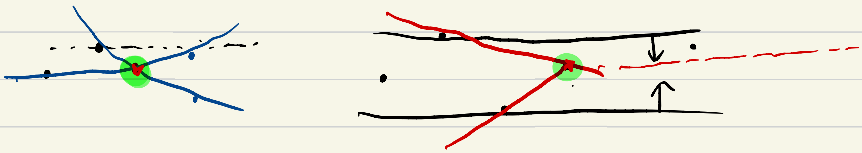
先枚举几个.

1. $n=1$: 一定成立



2. $n=2$

$(n^2+1=5)$



$n=2$时 { 在已有4项的情况,可以找到一项,以该项结尾存在长为2的↑和↓子序列

(已经在尽可能地将长为3的递增/递减子序列往后放 (结尾往后放)

总目标: 在n^2+1的序列中找到长为$n+1$的↑或↓子序列

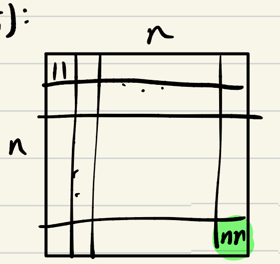
↓

转化: 在n^2的序列中找到一项,以该项为结尾存在长为n的↑和↓子序列

(前提: 在该n^2的序列中暂时不存在长为$n+1$的↑或↓子序列

法①: 考虑每一项,a_i,找出以a_i结尾的最长的↑和↓子序列 { $\uparrow_i$: 长为m_i; $\downarrow_i$: 长为n_i

(m_i, n_i):

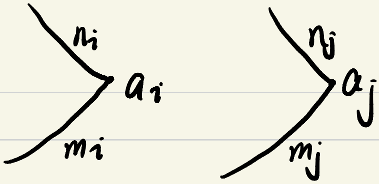


构造一一映射

断言: 每个元组(m_i, n_i)各不相同

反证: 设∃ i, j s.t $(m_i, n_i) = (m_j, n_j)$

a_i a_j



$a_i > a_j \rightarrow$ 存在以 a_j 结尾、长为 n_i+1 的递减子列

$a_i < a_j \rightarrow$ 存在 a_j m_i+1 递增

均与原假设矛盾.

故 $\forall\, i, j$ 均有 $(m_i, n_i) \neq (m_j, n_j) \Rightarrow$ 一定存在 k s.t. $(m_k, n_k) = (n, n)$

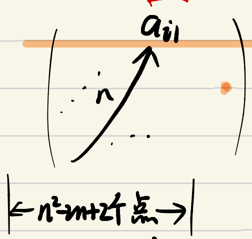
找到了以 a_k 结尾长为 n 的递增子列和长为 n 的 ↓子列

故不论 $a_{n^2+1} > / < a_k$，均存在长为 $n+1$ 的 ↑ or ↓ 子列

原目标：在 n^2+1 的序列中找到长为 $n+1$ 的 ↑或 ↓子序列
↓
转化：在 n^2 的序列中找到一项，以该项为结尾存在长为 n 的 ↑和 ↓子序列
（前提：在这 n^2 的序列中暂时不存在长为 $n+1$ 的 ↑或 ↓子序列

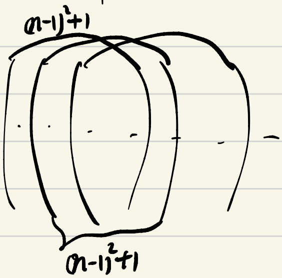
归纳法

归纳假设：在 $(n-1)^2+1$ 的序列中可找到长为 n 的 ↑或 ↓子序列
目标：在 n^2 的序列中找到一项，以该项为结尾存在长为 n 的 ↑和 ↓子序列



尾部加一个，同时前面 $(n-1)^2+1$ 项中再去掉一个
↓
去哪个？

还有 $2n-2$ 个点可以往上加.



若去掉最左边的一个点
无法保证两次得到的 ↑ or ↓子列是不同的
↓
应保证是用尾部标注的
↓
每一次去掉一个点，都去掉之前 ↑ or ↓子列中的尾项

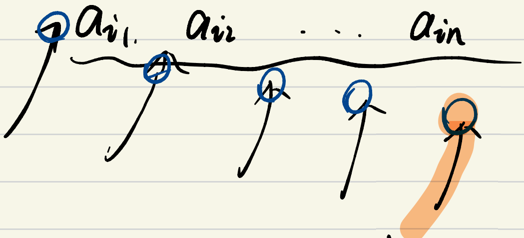
可以找到至少 $2n-1$ 项，以该项结尾有长为 n 的 ↑ or ↓子列

（构造过程：每次从尾部加一个点，同时将前 $(n-1)^2+1$ 项中长为 n 的 ↑ or ↓子列的尾项去掉）

找到了 $2n-1$ 个长为 n 的 ↑ or ↓子列

由抽屉原理，一定至少存在 n 个长为 n 的 ↑或 ↓子列

不妨设有n个↑子列(↓同理)



$a_{i_1} \sim a_{i_n}$ 是递减的, 否则就有了长为 n+1 的递增子列

此时, 对于 a_{i_n}, 以 a_{i_n} 结尾存在长为 n 的 ↑ 和 ↓ 子列 原命题得证.

n^2+1

法③: 直接考虑以这 n^2+1 个点结尾的最长↑子列, 长度为 l_i

case 1: $\exists i$ st $l_i \geq n+1$, 命题直接成立

case 2: $\forall i$, $1 \leq l_i \leq n$ (n个抽屉)

n^2+1 个 l_i 放进 n个抽屉中, 由抽屉原理:

一定存在一个抽屉(t) 其中至少有 n+1 个 l_i

$\Rightarrow$ $l_{t_1} = l_{t_2} = \cdots = l_{t_{(n+1)}} = t$ 保持其在原序列中顺序

a_{t_1} a_{t_2} . . . $a_{t_{(n+1)}}$

这些序列的 $a_{t_1}, a_{t_2} \cdots a_{t_{(n+1)}}$ 是递减的

否则: 若 $\exists$ $i<j$, $a_{t_i} < a_{t_j}$, 则以 a_{t_j} 结尾的最长↑子列长度 $\geq t+1$ 矛盾.

故得到了长为 n+1 的 ↓子列. a_{t_1} a_{t_2} $\cdots$ $a_{t_{(n+1)}}$