

有多少种旋转方法使此立方体绝对位置不变!

保持绝对位置不变的立方体置换是一个置换群

置换群

n 元素集合到自身的 $1-1$ 映射在集合意义下构成的群, 称 S_n 的对称群 (n 元素的群, 大小为 $n!$)
它的每个子群称为 S_n 的置换群.

S : {保持立方体绝对位置不变的置换}

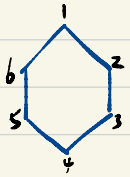
$S_1 \subseteq S$ 且 S_1 保持顶点 1 不变 $|S_1| = 3$

作陪集分解: #陪集

$\forall \sigma \in S, \sigma S_1$ 保持 1 映到 2 3 ... 8

则 #陪集 = 8

$\Rightarrow |S| = 3 \times 8 = 24$



可旋转/轴对称 保持绝对位置不变

S : 6个顶点的置换群

$|S| = 2$ #陪集 = 6

置换全写出来然后去复合.

群在集合上的作用 $\Rightarrow$ Polya 计数原理 (组合数学中讲)

群作用与轨道公式

$\forall$ 群 G , 集合 X , 定义 G 在 X 上的作用:

- $$\left\{ \begin{array}{l} \text{i) } G \text{ 在 } X \text{ 上的作用是满的: 不存在 } y \in X, \text{ s.t. } \forall x \in X, g(x) \neq y \\ \text{ii) } \forall g \in G, \forall x \in X, g(x) \in X \\ \text{iii) } \forall g_1, g_2 \in G, \forall x \in X \text{ 有 } (g_1 * g_2)(x) = g_1(g_2(x)), * \text{ 为群 } G \text{ 上的运算} \end{array} \right.$$

eg: G 为置换群, $g_1, g_2 \in G, g_1 * g_2 = g_1 \circ g_2$

引入 $\left\{ \begin{array}{l} 1. \text{ 固定子群} \\ 2. \text{ 轨道} \end{array} \right.$ 证 轨道公式.

1. 固定子群: $a \in X, G_a = \{g \in G \mid g(a) = a\}$

证 G_a 为 G 子群:

封闭: $\forall g_1, g_2 \in G_a, g_1(a) = a = g_2(a) = g_1(g_2(a)) \Rightarrow g_1 * g_2 \in G_a$

结合律: 天然满足

么元: $|_G$ 满足: $(|_G * g)(x) = g(x) = |_G(g(x)) \Rightarrow |_G(a) = |_G(g(a)) = g(a) = a \Rightarrow |_G \in G_a$

互逆: $\forall g_a \in G_a, g_a(a) = a = |_G(a) = g_a^{-1} g_a(a) = g_a^{-1}(a) \Rightarrow g_a^{-1} \in G_a$

2. 轨道: $a \in X, O_a = \{g(a) \mid \forall g \in G\} \subseteq X$ 称为 a 的轨道

证: 轨道公式: $|G| = |G_a| \times |O_a|, \forall a \in X$

G_a 为 G 的子群, 考虑 G 关于 G_a 的陪集分解

由 G_a 的定义: $\forall g_a \in G_a, g_a(a) = a$

若 $b \in O_a$, 即 $\exists g_b, \text{ s.t. } g_b(a) = b, \text{ s.t. } g_b \in G \setminus G_a$ 由此构造 $g_b * G_a = \{g_b * g_a \mid g_a \in G_a\}$

由 $\forall g \in g_b * G_a$ 有 $g(a) = g_b * g_a(a) = b \Rightarrow g_b * G_a \cap O_a = \phi$

同理依次在 O_a 中取元素对 G 做上述分解

设 $|G|$ 有限, 则 $G = G_a \cup g_{b_1} G_a \cup \dots \cup g_{b_n} G_a, n = |O_a|$

故 $|G| = |G_a| \times |O_a|$

这里有轨道, 所以多写点~