

群论：子群、正规子群、商群
环论：子环、理想、商环

子环：对 $\langle A, +, \times \rangle$ ：

$S \subseteq A$ 且 $\langle S, +, \times \rangle$ 为环 $\Rightarrow S$ 为 A 子环 / A 为 S 扩环

$\downarrow$ $\{0\}$ 和 A 是平凡子群

判定： S 为 A 的非空子集， S 为子环 $\iff \forall a, b \in S$ 有 $a-b \in S$ 和 $ab \in S$
 $\Rightarrow \checkmark$

$\Leftarrow \langle S, + \rangle$ 是 Abel 群 $\forall a, b \in S$ 有 $a-b \in S$ 则 $\langle S, + \rangle$ 是群，由 $\langle A, + \rangle$ 赋予交换性
 $\begin{cases} a-a=0 \in S & \text{恒元} \\ 0-a=-a \in S & \text{逆元} \\ a+b=a-(-b) \in S & \text{封闭} \end{cases}$
 结合律又天然成立。

$\langle S, \times \rangle$ 是半群： $\forall a, b \in S$ 有 $ab \in S$ 封闭 + 结合，半群

子环 $\rightarrow$ 理想

I 为 R 子环： $\forall a \in I$ 和 $r \in R$ $\begin{cases} ra \in I \text{ 则 } I \text{ 为 } A \text{ 的左理想} \\ ar \in I \text{ 则 } I \text{ 为 } A \text{ 的右理想} \end{cases}$
 $\downarrow$ 左、右均满足则为理想

这种 $\forall r \in R, ra, ar \in I$ 称 I 为 A 是吸收的，理想就是一种对环吸收的子环
 (注：有些地方不要求理想是子环)

判定： R 中 I 是理想 $\iff \begin{cases} \forall a, b \in I \text{ 有 } a-b \in I, \\ \forall a \in I, \forall r \in R, ar, ra \in I \end{cases}$

商环

环 R 理想 I ，则 I 是 $\langle R, + \rangle$ 的正规子群， R 对 I 的加法商群 $R/I = \{r+I \mid r \in R\}$ ，记 $\bar{r} = r+I$

商环中的每个元素都是针对 I 的一个加法陪集

R/I 上定义模 I 的加法 $\bar{a} + \bar{b} = \overline{a+b}$ 用 R/I 关于模 I 的加法和乘法构成环，称商环
 模 I 的乘法 $\bar{a} \cdot \bar{b} = \overline{a \cdot b}$

或称 A 模 I 的同余类环

例 $\langle \mathbb{Z}, +, \times \rangle$ $\mathbb{Z}/\langle 4 \rangle = \{0, 1, 2, 3\} = \mathbb{Z}_4$
 $\langle 4 \rangle$