组合计数

① 加法原则(分类) : $\#A=m,\ \#B=n \Rightarrow \#(A或B)=m+n$

② 乘法原则(分步) : A,B不相干, 同时发生: $m\cdot n$

③ 减法原则(容斥) : $\#U=m.\ A\subset U$有n, $\bar{A}$有$m-n$

线排列 :

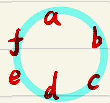
n个元素排成一列: $n!$

n个元素中取r个排成一列 : $A_n^r=\frac{n!}{r!}$

圆排列 :

n个元素成圆.

若各元素互不相同 : $\frac{n!}{n}=(n-1)!$ 从线排列任位置展开(切开),均对应不同线排列

eg: $a\ b\ c\ d\ e\ f \longleftrightarrow$ 

$b\ c\ d\ e\ f\ a \longleftrightarrow$

一般的:

对于由n个顶点构成的正n边形:

旋转下保持顶点不变的操作(作用/置换)构成群G, 为n阶循环群$\{r_0, r_1, r_2, \cdots r_{n-1}\}$

对于$S_n=\{n元线排列\}$ $\forall \{\sigma\}=\sigma_0\sigma_1 \cdots$ $\forall r_i\in G$. 有:

$r_i(\sigma)$相当于将每个σ_i左移i位置 $\rightarrow$ $\sigma_i\ \sigma_{i+1}\cdots\sigma_0\cdots\sigma_{i-1}$

则σ和$r_i(\sigma)$在圆排列下等价 :

$\forall\sigma\in S$. 记$O(\sigma)=\{r_i(\sigma)\mid\forall r_i\in G\}$为$\sigma$在$G$作用下的轨道.

此时两线排列位于同一轨道则等价

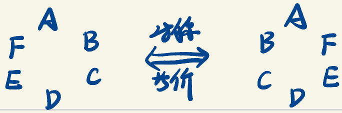
$\#$圆排列 $=$ $\#G$作用于S_n上的轨道

轨道公式 : σ的固定子群 : $G_\sigma:=\{r_i\in G\mid r_i(\sigma)=\sigma\}$, $|G|=|G_\sigma|\cdot|O_\sigma|$

对上面例子. $G_\sigma=\{r_0\} \Rightarrow |O_\sigma|=|G|=n$

$S=O_1\cup O_2\cup\cdots\cup O_k$ 则$|O_i|=n$

$\Rightarrow K=|S|/|O_i|=n!/n=(n-1)!$



项链数

圆排列 → 项链数，什么样的圆排列对应同一个项链

操作：
$$\begin{cases} G^r & \text{: n阶旋转} \\ G^{rd} & \text{: 2n阶: 旋转+对称} \quad : \quad G^r \times \underset{\{e,d\}}{G^d} \end{cases}$$

- 考虑二元群 $\{e, d\}$ 在圆排列上的作用 → $\frac{(n-1)!}{2}$
- 或考虑 G^{rd}(2n阶) 在线排列 S_n 上的作用 → $\frac{n!}{2n} = \frac{(n-1)!}{2}$

当然，上述均是针对元素各不相同的处理。若有重复(见作业题)请具体问题具体分析。

可重复排列：

n个元素排成一列，每个元素可重复用，r个位置：n^r

k_i个 r_i球排列：$\frac{(\sum k_i)!}{\prod(k_i!)} = \frac{n!}{k_1!\,k_2!\cdots k_t!}$

此处的固定群为相同的物品互换位置

组合数

n中选r个：$\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!\,r!}$

☆ 不定方程 $\begin{cases} x_1+x_2+\cdots+x_k=n & (n\geq k) \\ x_i \geq 1 \end{cases}$ 的解个数 $\binom{n-1}{k-1}$

0 | 0 0 | 0 0 | 0 0 ⋯ 0 0 直接n−1个空里插(k−1)个板，分成k份均不少于1个

较：$\begin{cases} x_1+x_2+\cdots+x_k=n \\ x_i \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x_1+1)+(x_2+1)+\cdots+(x_k+1)=n+k \\ x_i+1 \geq 1 \end{cases}$ 解的个数 $\binom{n+k-1}{k-1}$

更一般的 $\begin{cases} x_1+x_2+\cdots+x_k=n \\ x_i \geq a_i, \ \sum a_i = A \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} [x_1+(1-a_1)]+\cdots+[x_k+(1-a_k)] = n+k-A \\ x_i+1-a_i \geq 1 \end{cases}$，$\binom{n+k-A-1}{k-1}$

再：$\begin{cases} x_1+x_2+\cdots+x_k=n \\ x_i \leq a_i \end{cases}$ 取负向上转化

$\begin{cases} x_1+x_2+\cdots+x_k=n \\ a_i \leq x_i \leq b_i \end{cases}$ 转化为：$\boxed{\begin{cases} x_1+x_2+\cdots+x_k=n \\ x_i \geq a_i \end{cases} - \begin{cases} x_1+x_2+\cdots+x_k=n \\ x_i \geq b_i+1 \end{cases}}$

这样转化是错的，之后的容斥原理可用来解这个问题

多重组合数

k_i个C_i球. t种颜色, $k_1+k_2+\cdots+k_t=n$. 取r个 共有多少种取法?

取x_i个C_i球, 有: $\begin{cases} x_1+x_2+\cdots+x_t=r \\ 0\le x_i\le k_i \end{cases}$

先来看个简单情况: 有3种颜色 $(t=3)$

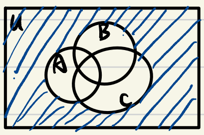
见: $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=10 \\ 0\le x_1\le 5,\ 0\le x_2\le 6,\ 0\le x_3\le 7 \end{cases}$

考虑: $U: \{0\le x_1,\ 0\le x_2,\ 0\le x_3\}$ 全集

$A: \{x_1\ge 6\}$

$B: \{x_2\ge 7\}$

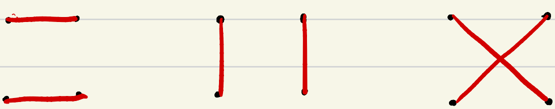
$C: \{x_3\ge 8\}$



$$|U|-|A\cup B\cup C| = |U|-|A|-|B|-|C| + |A\cap B|+|B\cap C|+|A\cap C| - |A\cap B\cap C|$$

凸n多边形的对角线交点个数(设任三条对角线在内部不共点)

☆: 任取4个点,这4个点连成二线段; $\frac{1}{2}\binom{4}{2}\binom{2}{2}=3$



3种连法中只有一种能形成交点 $\Longrightarrow$ #对角线交点 = #取4个顶点的取法 $=\binom{n}{4}$