组合恒等式

① $\binom{n}{r}=\binom{n}{n-r}$
$\begin{cases}\text{LHS: 先n个人取r个放A盒, 余下放B盒} \\ \text{RHS: 先n个人取n-r个放B盒, 余下放A盒}\end{cases}$

② $\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}=2^n$
$\begin{cases}\text{LHS: 从n个人中取若干人的所有取法} \\ \text{RHS: 每个人被取或没被取}\end{cases}$

③ 二项式系数: $(1+x)^n=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^i$ ，x^i的系数为n个项中取i个为x, 其余为1的选法

↓

此亦有: $(1-1)^n=\sum\binom{n}{i}(-1)^i=0$

还可作一些奇偶结合、求导结合, 但要注意特殊值带入的情况(见作业)

☆ A: 从n个物品中取奇数个 $=\{U\subseteq[n]\mid |U|=odd\}$

B 从n个物品中取偶数个 $=\{U\subseteq[n]\mid |U|=even\}$

尝试构造 $A\leftrightarrow B$的映射, 确定数量关系

① n为奇: $\forall U\subseteq A$. $[n]\setminus U\subseteq B$. 此时可直接构造一一映射 $f:A\to B$. $f(A)=U\setminus A=B$

② n为偶: 考虑添一项或减一项构成奇数

eg: 固定此次要添去或的元素为1: $\begin{cases}1\in U\text{时, 记 } V=U\setminus\{1\}. \ V\in B \\ 1\notin U\text{时 记 } V=U\cup\{1\}\end{cases}$

$f: A\to B$. $V=f(U)=\begin{cases}U\setminus\{1\} & 1\in U \\ U\cup\{1\} & 1\notin U\end{cases}$

$\forall V\in B$. $U=\begin{cases}V\setminus\{1\} & 1\in V \\ V\cup\{1\} & 1\notin V\end{cases}$ → 证明是一一映射. 从而奇数项和偶数项项数相同

再推广: $\{1\}\subseteq[n]$. $\forall U\in A$. $|U|$为奇. $\forall W\subseteq[n]$ ($|W|$为奇)

构造 $A\to B$的一种一一映射. 记 $U\triangle W=(U\cup W)\setminus(U\cap W)$ 对称差.

构造 $f: A\to B$: $V=f(U)=U\triangle W$

④ $(1+x)^n=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^i \Rightarrow n(1+x)^{n-1}=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}ix^{i-1} \Rightarrow \boxed{\sum\binom{n}{i}i=n\cdot 2^{n-1}}$

意义: n个物品中取 i 个物品的概率 $p_i=\frac{\binom{n}{i}}{2^n}$

$E(X)=\sum_{i=0}^{n}\frac{i\binom{n}{i}}{2^n}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}=\frac{n}{2} \Rightarrow \sum_{i=1}^{n}i\binom{n}{i}=n\cdot 2^{n-1}$

or: 先选小组长,再分配成员

$\binom{n}{1}$ 余下 $n-1$ 人,加或不加 $\Rightarrow n\cdot 2^{n-1}$

另一方面,先选成员,成员内部推组长

$\sum\binom{n}{i}\cdot\binom{i}{1}$

⑤ $\binom{n+1}{k+1}=\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}$

$n+1$ 人中选 $k+1$ 人 选成员1 不选成员1.

杨辉三角. $(0,0)\rightarrow(k,m)$,每次向上或向右,共多少种走法:

共 $k+m$ 步,从中选 m 步向上,余下向右 $\binom{k+m}{m}$

更进一步: $\binom{m+k}{m}=\binom{m+k-1}{m-1}+\binom{m+k-1}{m}$

先到 $(k,m-1)$ 先到 $(k-1,m)$