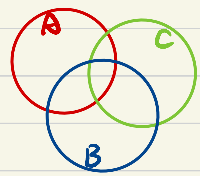
容斥原理

欧拉函数及欧拉定理.

$m = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \cdots p_k^{r_k}$ $\quad \varphi(m) = m(1-p_1^{-1})\cdots(1-p_k^{-1})$ $\quad$ 证明思路: $\begin{cases} m\text{为素数} & \varphi(m) = m-1 \\ (m,n)=1. & \varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n) \end{cases}$

例: 有集合 A.B. $A\cap B \neq \phi$, 则 $|A\cup B| = |A|+|B|-|A\cap B|$

$$|A\cap B| = |A|+|B|-|A\cup B|$$



推: $|A\cup B\cup C| = |A|+|B|+|C|$
$\qquad -|A\cap B|-|B\cap C|-|A\cap C|$
$\qquad +|A\cap B\cap C|$

$$\begin{aligned} |A\cap B\cap C| &= |A\cup B\cup C| - |A| - |B| - |C| + |A\cap B| + |B\cap C| + |A\cap C| \\ &= |A\cup B\cup C| - |A| - |B| - |C| \\ &\quad + (|A|+|B|-|A\cup B|) + (|A|+|C|-|A\cup C|) + (|B|+|C|-|B\cup C|) \\ &= |A|+|B|+|C| - |A\cup B| - |A\cup C| - |B\cup C| + |A\cup B\cup C| \end{aligned}$$

$$\overline{A\cup B\cup C} = U\setminus(A\cup B\cup C) = (U\setminus A)\cap(U\setminus B)\cap(U\setminus C) = \bar{A}\cap\bar{B}\cap\bar{C}$$

$\downarrow$

$$\begin{aligned} |\overline{A\cup B\cup C}| &= |\bar{A}\cap\bar{B}\cap\bar{C}| \\ &= |U| - (|A|+|B|+|C| - |A\cap B| - |B\cap C| - |A\cap C| + |A\cap B\cap C|) \end{aligned}$$

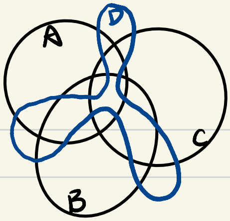
De Morgan: $\overline{A\cup B} = \bar{A}\cap\bar{B}$, $\overline{A\cap B} = \bar{A}\cup\bar{B}$

记 $\overline{\square} = \square'$:

$$\begin{aligned} |A'\cap B'\cap C'| &= |U| - |\bar{A'}| - |\bar{B'}| - |\bar{C'}| + |\overline{A'\cup B'}| + |\overline{B'\cup C'}| + |\overline{A'\cup C'}| - |\overline{A'\cup B'\cup C'}| \\ &= |U| - (|U|-|A'|) - (|U|-|B'|) - (|U|-|C'|) \\ &\quad + (|U|-|A'\cup B'|) + (|U|-|A'\cup C'|) + (|U|-|B'\cup C'|) \\ &\quad - (|U|-|A'\cup B'\cup C'|) \\ &= |A'|+|B'|+|C'| - |A'\cup B'| - |A'\cup C'| - |B'\cup C'| + |A'\cup B'\cup C'| \end{aligned}$$

B

见 A.B.C.D 四个集合.



$$|A\cup B\cup C\cup D| = |A|+|B|+|C|+|D|$$
$$-|A\cap B|-|B\cap C|-|A\cap C|-\cdots$$
$$+|A\cap B\cap C|+\cdots$$
$$-|A\cap B\cap C\cap D|$$

最终证: $|A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n| = \sum_{i=1}^{n}|A_i|$
$$-\sum_{i\neq j}|A_i\cap A_j|$$
$$+\sum_{i\neq j\neq k}|A_i\cap A_j\cap A_k|$$
$$-\cdots$$
$$+(-1)^{m-1}\sum_{I\subseteq[n],|I|=m}\left|\bigcap_{i\in I}A_i\right|$$
$$\cdots$$

证: 数学归纳法: 设对 n 个集合成立. 考虑 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_{n+1} = B\cup A_{n+1}$. 有:

$$|B\cup A_{n+1}| = |B|+|A_{n+1}|-|B\cap A_{n+1}| = |A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n|+|A_{n+1}|-|B\cap A_{n+1}|$$

$$B\cap A_{n+1} = (A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)\cap A_{n+1} = \underbrace{(A_1\cap A_{n+1})}_{B_1}\cup\cdots\cup\underbrace{(A_n\cap A_{n+1})}_{B_n}$$

$$\Rightarrow |B\cap A_{n+1}| = |B_1\cup B_2\cup\cdots\cup B_n|$$
$$=\sum|B_i|-\sum|B_i\cap B_j|-\cdots-(-1)^k\sum\left|\bigcap_{i\in I}B_i\right|\cdots$$
$$=\sum|A_i\cap A_{n+1}|-\sum|A_i\cap A_j\cap A_{n+1}|+\cdots+(-1)^{k-1}\sum_{i\in I}\left|\left(\bigcap B_i\right)\cap B_n)\right|+\cdots+(-1)^{n-1}|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_{n+1}|$$
$$|B\cup A_{n+1}| = \cdots$$

再由 $|A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n| = \sum_{i=1}^{n}|A_i|-\sum_{i\neq j}|A_i\cap A_j|+\cdots$ (n个元素的容斥)

$\forall x\in A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$, 不妨设 $x\in A_1,A_2,\cdots A_k$, $x\notin A_{k+1},\cdots A_n$

$$\sum_{i=1}^{n}|A_i|-\sum_{i\neq j}|A_i\cap A_j|+\cdots(-1)^{k-1}\sum_{|I|=k}\left|\bigcap_{i\in I}A_i\right|+\cdots+(-1)^{m-1}|A_1\cap\cdots\cap A_m|$$

x的出现次数: $k \quad -\binom{k}{2} \quad +\binom{k}{3} \quad +\cdots \quad +(-1)^k\binom{k}{k}$

共 $\sum_{i=1}^{k}(-1)^{i-1}\binom{k}{i}$, 即 $\sum_{i=0}^{k}(-1)^{i-1}\binom{k}{i}=0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{k}(-1)^{i-1}\binom{k}{i}-k=0$

即: $\sum_{i=1}^{k}(-1)^{i-1}\binom{k}{i}=k=$ 左边 x的出现次数.

$$|\overline{A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n}| = |\bar{A}_1\cap\bar{A}_2\cap\cdots\cap\bar{A}_n| = |U| - |A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n|$$

$$|A_1'\cap A_2'\cap\cdots\cap A_n'| = |U| - |\bar{A}_1'\cup\bar{A}_2\cup\cdots\cup\bar{A}_n'|$$

$$= |U| - \left(\sum_{i=1}^{n}|\bar{A}_i| - \sum_{i\neq j}|\bar{A}_i\cap\bar{A}_j| + \cdots + (-1)^{k-1}\sum_{|I|=k}|A_{i_1}'\cap\cdots\cap A_{i_k}'|\right.$$

eg: 1~120中不能被2或3或5整除的数

$A=\{i\in[120] \mid 2|i\}$ $\bar{A}\cap\bar{B}\cap\bar{C} = \overline{A\cup B\cup C}$

$B=\{i\in[120] \mid 3|i\}$ 其中 $A\cup B\cup C = |A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C|+|A\cap B\cap C|$

$C=\{i\in[120] \mid 5|i\}$ $\Rightarrow \bar{A}\cap\bar{B}\cap\bar{C} = 120-\frac{120}{2}-\frac{120}{3}-\frac{120}{5}+\frac{120}{2\times3}+\frac{120}{3\times4}+\frac{120}{4\times5}-\frac{120}{2\times3\times5}$

$= 120(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{3})(1-\frac{1}{5})$ 恰好满足Euler函数的形式

eg: 三个班级 男: m_1, m_2, m_3 每个班挑一名,至少有一个班为男生的挑法/概率

女: n_1, n_2, n_3.

A: 一班挑出男生 $|A| = m_1(m_2+n_2)(m_3+n_3)$ $|A\cap B| = m_1m_2(m_3+n_3)$ ...

B: 二班挑出男生 $|B| = (m_1+n_1)m_2(m_3+n_3)$

C: 三班挑出男生 $|C| = (m_1+n_1)(m_2+n_2)m_3$

$|A\cup B\cup C| = |A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|B\cap C|-|C\cap A|+|A\cap B\cap C|$

$= (m_1+n_1)(m_2+n_2)(m_3+n_3) - n_1n_2n_3$

从概率角度出发.

若 A. i.d. B. $\Rightarrow P(AB)=P(A)P(B)$. $P(ABC)=P(A)P(B)P(C)$

$\Rightarrow P(A)=\frac{m_1}{m_1+n_1}$ $P(B)$ $P(C)$

$\Rightarrow |A\cap B\cap C| = |A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|B\cap C|-|C\cap A|+|A\cap B\cap C|$

$\Rightarrow P(ABC)=\frac{|A\cap B\cap C|}{|S|}$ $|S|=(m_1+n_1)(m_2+n_2)(m_3+n_3)$

$=$ ~ 全展开

$= P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(BC)-P(AC)+P(ABC)$

$= 1-[1-P(A)][1-P(B)][1-P(C)]$

$= P(A)P(B)P(C)$

☆为什么用交集表示并集和用并集表示交集形式相同.

记"交集"为函数 f, 并集为 g. f, g 为定义在 $[n]$ 上的函数.（记 $\{A_1, A_2, \cdots A_n\} = [n]$）

$$f([n]) = \sum_{X \subseteq [n] 且 X \neq \phi} (-1)^{|X|-1} g(X) \qquad \begin{cases} f([n]) = |A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| \\ g(X) = |\bigcap_{i \in X} A_i| \end{cases}$$

同理. $$g([n]) = \sum_{X \subseteq [n] 且 \phi \neq X} (-1)^{|X|-1} f(X) \qquad \begin{cases} g([n]) = |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n| \\ f(X) = |\bigcup_{i \in X} A_i| \end{cases}$$

见后面.

错排问题 : $a_1, a_2, \cdots a_n$ 定义错排 $\forall i \in [n]$, $a_i \neq i$ 错排个数?

A_i : {i 被正确排列}

则 $S = |\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \cdots \cap \bar{A}_n|$

$= |\overline{A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n}|$

其中: $|A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_k| = (n-k)!$ 表示 k 个 a_i 固定在位置 i, 其余随便排.

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = \sum |A_i| - \sum |A_i \cap A_j| + \cdots + (-1)^{k-1} \sum_{|I|=k} |\bigcap_{i \in I} A_i| + \cdots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap \cdots \cap A_n|$$

$$= \binom{n}{1}(n-1)! - \binom{n}{2}(n-2)! + \cdots + (-1)^{k-1}\binom{n}{k}(n-k)! + \cdots + (-1)^{n-1}\binom{n}{n}(n-n)!$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} (-1)^{i-1} (n-i)!$$

则 $$|S| = n! - |A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} (n-i)!$$

☆记 p_n 为 n 元排列. $$\lim_{n \to \infty} p_n = \frac{\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} (n-i)!}{n!} = \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i!} = \frac{1}{e} \quad !!!$$

eg 组合恒等式 : $$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \Big[\underbrace{\sum_{i=0}^{k} (-1)^i \frac{k!}{i!}}_{k元错排数}\Big] = n!$$

LHS: 排对的位置可以 0 ~ n 个. 每个均有 $\binom{n}{k}$ 组对排. 其余错排.

RHS. 全排列

现用 a_n 表示 n元排列的错排数. 则:

$$\binom{n}{0}a_n + \binom{n}{1}a_{n-1} + \cdots + \binom{n}{n}a_0 = n!$$ 用此递推式求 a_n?

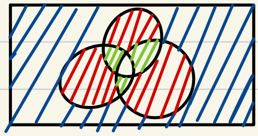
A_n^i: {n元排列中恰有 i 个位置排对} $B_i=\{a_i=i\}$

用 B_i 及各 B_i 交集求 A_n^i

$A_n^0 = \{$不属于 $\forall B_i\}$ ///

$A_n^1 = \{$恰属于 1 个 $B_i\}$ ///

$A_n^k = \{$恰属于 k 个 B_i ///



$$A_3^0 = |S| - \Sigma|B_i| + \Sigma|B_i \cap B_j| - |B_1 \cap B_2 \cap B_3|$$

$$A_3^1 = \underbrace{|B_1 \cup B_2 \cup B_3|}_{\Sigma|B_i| - \Sigma|B_i \cap B_j| + |B_1 \cap B_2 \cap B_3|} - |B_1 \cap B_2| - |B_2 \cap B_3| - |B_1 \cap B_3| + 2|B_1 \cap B_2 \cap B_3|$$

$$= \Sigma|B_i| - 2\Sigma|B_i \cap B_j| + 3|B_1 \cap B_2 \cap B_3|$$

$$A_3^3 = |B_1 \cap B_2 \cap B_3|$$

更一般的. $A_1, A_2, \dots A_n$. 用 W[i] 表示恰属于其中 i 个集合的元素个数, 用 A_i 表示 W[i]

Menage Problem : n对夫妻围坐一圆,男女相隔,夫妻不相临,有多少坐法.

转换: 先排男士,再错排女士(若转为线排,须考虑两端的特殊情况)

直接考虑圆排列:

先排 male: $\#_1 = (n-1)!$

再排 female: $a_1 \neq 1, 2$. $a_2 \neq 2, 3$ $A_i = \{a_i = i \text{ or } a_i = i+1\} \pmod n$

$$A_i \cap A_j = \begin{cases} 4 \times (n-2)! & a_i, a_j \text{不相临} \\ 3 \times (n-2)! & a_i, a_j \text{相临} \end{cases}$$ ⇒ 难以直接计算 $|A_i \cap A_j|$ 从而得 $\Sigma A_i \cap A_j$

直接整体考虑 $\sum_{|I|=k}\left|\bigcap_{i\in I} A_i\right|$（只在意所有 k 项交集的整体，而不再考虑单个）

位置　a_1　a_2　a_3 $\cdots$　a_n

可选：$(1,2)$　$(2,3)$　$(3,4)$ $\cdots$　$(n,1)$

此时 $A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\cdots\cap A_{i_k}$ 表示：先选定 k 个位置，再从每个位置的可选数中选一个

$\Rightarrow$ n 对中选出 k 对，每对至多选一个

↳ 对定 k 对中任意两对，不相临则分别任意选

$\Downarrow$　　　　　　　　　　　相临则要求从这两对中取的数不相临（头尾算相临）

问题直接转为从 2n 个物品中选 k 个不相临的物品。

↳ $\begin{cases} 2n\text{ 个排成一列，取 }k\text{ 个两两不相临且首尾不同时取到} & ① \\ 2n\text{ 个成一圈从中取 }k\text{ 个两两不相临} & ② \end{cases}$

①：设取到的编号为：$x_1, x_2, \cdots x_k$.

有：
$$\begin{cases} y_1 = x_1 \geq 1 \\ y_2 = x_2 - x_1 - 1 \geq 1 \\ \vdots \\ y_k = x_k - x_{k-1} - 1 \geq 1 \\ y_{k+1} = 2n+1-x_k \geq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1+y_2+\cdots+y_{k+1} = 2n+1-(k-1) = 2n+2-k \\ y_i \geq 1 \end{cases}$$

$$\binom{2n+2-k-1}{k} = \binom{2n+1-k}{k}$$

首尾同时取到：
$$\begin{cases} y_1 = x_1 = 1 \\ \vdots \\ y_k = x_k - x_{k-1} - 1 \geq 1 \\ y_{k+1} = 2n - x_k = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_2+y_3+\cdots+y_k = 2n-(k-1) \\ y_i \geq 1 \end{cases}$$

$$\binom{2n-k-2}{k-2}$$

（此处请自己验算一下，可能有错误）

$\Rightarrow$ 最终 $\binom{2n+1-k}{k} - \binom{2n-k-2}{k-2}$

② 2n个人坐一圈，取k个不相临物品

从中取出k堆后，还剩k堆.

不妨设第一次是1号，第一堆从2号开始，用x_i表示第i堆的个数:

$$\begin{cases} x_1+x_2+\cdots+x_k=2n-k \\ x_i\geq 1 \end{cases}$$ 共 $\binom{2n-k-1}{k-1}$ 种取法

注：第一次可取1~2n，则有 $2n\binom{2n-k-1}{k-1}$ 个

再：关于k个不相临物品，每种取法实际重复计算了k次

$\Rightarrow \# = \frac{2n}{k}\binom{2n-k-1}{k-1}$

故即：

男：$n!$

女：$\overline{A_1\cup A_2\cup A_3\cup\cdots\cup A_n} = |S| - \sum|A_i| + \cdots + (-1)^k\sum_{|I|=k}\left|\bigcap_{i\in I}A_i\right| + \cdots$

$$= n! + \sum_{k=1}^{n}(-1)^k\frac{2n}{k}\binom{2n-k-1}{k-1}.$$

依然，请自己验算一遍.