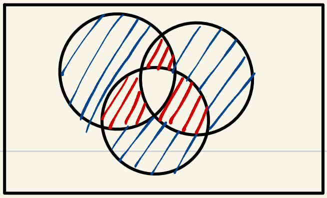

S_1: ///
S_2: ///

Mobius 反演

集合上的 Mobius:

考虑 n个集合 $A_1, A_2, \cdots A_n$，有 S_i $(i\in 0\sim n)$ 表恰好属于 i 个集合的元素集合.

n=3时: $S_0=\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\overline{A_3} = |S|-|A_1\cup A_2\cup A_3| = \sim$

$$S_1=|A_1|+|A_2|+|A_3|-2|A_1\cap A_2|-2|A_2\cap A_3|-2|A_1\cap A_3|+3|A_1\cap A_2\cap A_3|$$

$$\sum_{|X|=1}|\cap X| = |A_1|+|A_2|+|A_3| = S_1+2S_2+3S_3$$

$$\sum_{|X|=2}|\cap X| = |A_1\cap A_2|+\cdots = S_2+3S_3$$

n=4时: 自己查数去写吧~，结果:

$$\begin{pmatrix} \bigcap_{|X|=1} \\ \bigcap_{|X|=2} \\ \bigcap_{|X|=3} \\ \bigcap_{|X|=4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \binom{1}{1} & \binom{2}{1} & \binom{3}{1} & \binom{4}{1} \\ & \binom{2}{2} & \binom{3}{2} & \binom{4}{2} \\ & & \binom{3}{3} & \binom{4}{3} \\ & & & \binom{4}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \end{pmatrix} \qquad S = M^{-1}\bigcap$$

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} \binom{1}{1} & -\binom{2}{1} & \binom{3}{1} & -\binom{4}{1} \\ & \binom{2}{2} & -\binom{3}{2} & \binom{4}{2} \\ & & \binom{3}{3} & -\binom{4}{3} \\ & & & \binom{4}{4} \end{pmatrix}$$

猜想对于一般的n:

$$S_k = \binom{k}{k}\sum_{|X|=k}|\cap X| - \binom{k+1}{k}\sum_{|X|=k+1}|\cap X| + \cdots + (-1)^{n-k}\binom{n}{k}\sum_{|X|=n}|\cap X|$$

$$\sum_{|X|=k}|\cap X| = S_k + \binom{k+1}{k}S_{k+1} + \cdots + \binom{n}{k}S_n$$

集合上的 Mobius 反演 $\iff$ 容斥原理 (证明略)

f, g 为定义在集合 [n] 的子集上的函数:

若 $f(X)=\sum_{\varnothing\subseteq Y\subseteq X} g(Y)$ 则 $g(X)=\sum_{\varnothing\subseteq Y\subseteq X}(-1)^{|X|-|Y|}f(Y)$

容斥原理的内容请主要参考下一个文件.