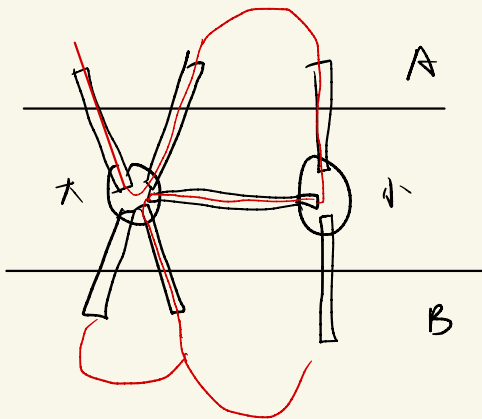


图论

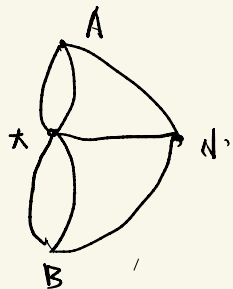


① 所有桥走一遍，回到出发点？ X

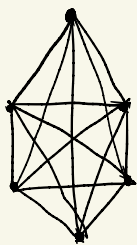
A, B 岸连着 3 座桥

② 只是走完所有桥？ X

大, 小, 岛连着奇数道桥



任取 6 个人，其中一定存在 3 个人，两两认识或两两不认识。



红边：两两认识

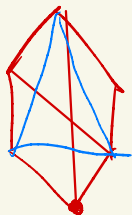
蓝边：两两不认识

$$\binom{6}{2} = 15$$

∴ 一定有 8 条同色边。

一定存在某一点，邻边有三条同色（不妨红）

⇒ ∃ 蓝色三角形



对于一个 8 条边的无红三角形的图，为什么一定存在蓝三角形？

蓝

给定一个 n 阶完全图 K_n ，边红、蓝边染色， st 一定存在一个红色 K_4 或者一个蓝色 K_3 ，问 n 最小多少？

已知：找 4 条蓝边 ---- 可以 ----。

问题：找多少条红色邻边，可以保证 $\exists$ 红 K_4 或 蓝 K_3 ？

只需在“底边”中找到一个红 K_3 或 蓝 K_3 ， $\Rightarrow$ 底边需要多少个点？

6个，5个不行 

$\Rightarrow$ 从一个点出发的所有邻边或有 6 条红邻 或有 4 条蓝邻，至少需有多少条邻边？

$\Rightarrow$ 9 条 $\Rightarrow K_{10}$.

K_9 行不行？ $\Rightarrow$ 要证不行，则需要每个顶点 5 红，3 蓝。

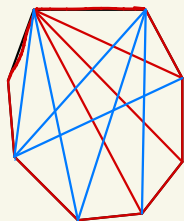
则每个顶点有 $\frac{3 \times 9}{2} = \frac{27}{2} \notin \mathbb{N}$ ， $\therefore$ 5 红，3 蓝不成立。

$\therefore K_9$ 行。

k_8 行不行? $\Rightarrow$

5红 2蓝

4红 3 蓝



无向图 $G=(V, E)$

无向图是简单图. $\Leftrightarrow \forall v, u \in V, E$ 之间最有一条边连接 u 和 v .

有向图 $D=(V, E)$ $e \in E$ $e=(u, v) \neq (v, u)$

简单有向图. $\left\{ \begin{array}{l} \text{没有 loop} \\ \text{没有 multiple edge} \end{array} \right.$ $\forall u \in V, (u, u) \notin E$
 $\forall u, v \in V (u \neq v), (u, v)$ 至多只有一条.
可以同时有 $(u, v), (v, u)$

给定一个简单无向图 $G=(V, E)$, 可以对 E 的每条边给定一个方向, 从而得到一个简单有向图.
图的定向 orientation $2^{|E|}$ 种.

无向图顶点度数, $\forall u \in V$, $\deg(u) = \# \text{邻边} = \# \{ (u, v) \in E \mid v \in V \}$

有向图顶点 出度和入度、

$\deg^+(u) = \# \text{邻边以 } u \text{ 为起始端点} = \# \{ (u, \vec{v}) \in E \mid v \in V \}$ 出度

$\deg^-(u) = \# \text{ --- 终止 --- } \# \{ (\vec{v}, u) \in E \mid v \in V \}$ 入度

平衡. 对于有向图 G , 若 $\forall u \in V$, $\deg^+(u) = \deg^-(u)$, 则称该有向图是平衡的.

定理: 对于任意有向图 $D = (V, E)$

$$\sum_{u \in V} \deg^+(u) = \sum_{u \in V} \deg^-(u) = |E|$$

proof: 遍历所有边

对无向图.

$$\sum_{u \in V} \deg(u) = 2|E|.$$

proof: G 考虑任一定向, 得到有向图 $D = (V, E')$

$$|E| = |E'|$$

$$\forall u \in V, \text{ 有 } \deg_G(u) = \deg_D^+(u) + \deg_D^-(u).$$

$$\sum_{u \in V} \deg_G(u) = \sum_{u \in V} (\deg_D^+(u) + \deg_D^-(u)) = |E| + |E| = 2|E|.$$

推论: V 无向图. 顶点为奇数度数的点的个数一定是偶数个.

连通性

walk

这是一条路径.

$$\forall i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$$

对于无向图: $v_0, v_1, \dots, v_n$.

$$(v_i, v_{i+1}) \in E$$

对于有向图: $v_0 \dots v_n$

$$\text{则有 } (v_i, v_{i+1}) \in E.$$

Trail (迹) 是一条 walk 且边不重复.

无向图 $v_0 \dots v_n$

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall i \in \{0, 1, \dots, n-1\}, (v_i, v_{i+1}) \in E, \\ \downarrow \\ \forall i, j \in \{0, 1, \dots, n-1\}, (v_i, v_{i+1}) \neq (v_j, v_{j+1}) \end{array} \right.$$

$$(v_i, v_{i+1}) \neq (v_j, v_{j+1})$$

Circuit (closed trail)

$v_0 v_1 \dots v_n$ 是一条 trail, 且满足 $v_0 = v_n$.

对于有向图的 trail, 基本定义与上相似, 但是允许同时包含 (u, v) 和 (v, u)

path (路)

一条 walk $v_0 v_1 \dots v_n$ 满足 $\forall i, j \in \{0, 1, \dots, n\} (i \neq j) \implies v_i \neq v_j$.

Cycle (回路)

一条 walk 边 $v_0 \dots v_n$, 满足 $\begin{cases} v_0 = v_n \\ \forall i \neq j \in \{0, 1, \dots, n-1\} \\ v_i \neq v_j \end{cases}$

path 一定是 trail

cycle 一定是 circuit.

Path 最长是 $|V|-1$

Cycle 最长是 $|V|$.

一条 Path, 长度为 $|V|-1$, 则这条 Path 途经每个顶点一次.

Hamilton Path

- 一条 Cycle, 长度为 $|V|$, 则这条 Cycle 途经除首点外每个顶点一次.
Hamilton Cycle

- 一条 trail, 长度为 $|E|$, 经过所有边.
Eulerian trail

- 一条 Circuit, 长度为 $|E|$, 经过所有边.
Eulerian circuit

$$G = (V, E) \quad \forall u, v \in V \quad (u \neq v)$$

无向图.

u, v connected (连通的) $\exists$ 一条 walk, st $u, v_1, v_2 \dots v_n, v$
起 终

有向图

u, v 单向连通. $\exists$ walk $u \rightarrow v_1 \rightarrow \dots \rightarrow v_n \rightarrow v$
或 $v \rightarrow v_1 \rightarrow \dots \rightarrow v_n \rightarrow u$

两者均 $\exists \Rightarrow$ 双向连通

无向图连通的 $\Leftrightarrow$ $\forall$ 两点连通

有向图 强连通 两点双向连通

单向连通 $\vee$ 两点单 ...

弱连通

每条边去掉方向后构成连通无向图.

cut (割) 无向图 $G = (V, E)$

$$V = S_1 \cup S_2 \quad S_1 \cap S_2 = \emptyset \quad S_1 S_2 \neq \emptyset \quad (S_1 \text{ 的点和 } S_2 \text{ 的点间的边})$$

$$C(S_1, S_2) = \{ (u, v) \in E \mid u \in S_1, v \in S_2 \}$$

对于有向图 $G = (V, E)$ $S_1 \cup S_2$

$$C(\overrightarrow{S_1}, \overrightarrow{S_2}) = \{ (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \in E \mid u \in S_1, v \in S_2 \}$$

$$C(\overrightarrow{S_2}, \overrightarrow{S_1}) = \{ (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \in E \mid u \in S_2, v \in S_1 \}$$

无向图 G 是连通的 $\iff \forall S_1, S_2, S_1 \cup S_2 = V, C(S_1, S_2) \neq \emptyset$

$\Rightarrow$ 反证: $\exists \text{ cut } S_1, S_2 \text{ st } C(S_1, S_2) = \emptyset$

取 $u_1 \in S_1, u_2 \in S_2$

$\therefore$ 连通

$\therefore \exists \text{ walk } u_1 v_1 v_2 \dots v_n u_2$

想证 $\exists v_i \in S_1, v_{i+1} \in S_2$

归纳法: 对长度进行归纳.

$l=1$ 时, $u_1 u_2$ 显然满足假级.

$l=k$ 时, $\exists$ 假级的 $v_i v_{i+1}$.

$l=k+1$ 时, 有 $u_1 v_1 \dots v_k u_2$ $\begin{cases} v_k \in S_1 \text{ 时, } (v_k, u_2) \in C(S_1, S_2) \\ v_k \in S_2 \text{ 时, } u_1 \dots v_k \text{ (长为 } k) \text{ 中有这样的 } v_i v_{i+1}. \end{cases}$

$\Leftarrow$: 取 $\forall v_1, v_2$, $S_1 = \{v_1\}$ $S_2 = V \setminus S_1$ $\therefore \exists (v_1, u_1) \in C(S_1, S_2)$

如果 $u_1 = v_2$, done | 否则, $u_1 \neq v_2$, 取 $S_1 = \{v_1 \cup u_1\}$ $S_2 = V \setminus S_1$ $\exists (v_1, u_1) \in C(S_1, S_2)$

$\begin{cases} v = v_1, \text{ 有 } (v_1, u_2) \\ v = u_1, \text{ 有 } v_1 u_1 u_2 \end{cases} \Rightarrow \exists \text{ 一条 Path, 从 } v_1 \text{ 到 } u_2$

$u_2 = v_2 \Rightarrow \text{结束}$

$u_2 \neq v_2 \Rightarrow \text{将 } u_2 \text{ 加入 } S_1 \text{ 中.}$

不断循环, 可得 v_1, v_2 连通, 且 v_1, v_2 间 $\exists$ 一条 Path

(连通 $\Rightarrow$ Path)

? 无向图两个点之间 $\exists$ walk, 则一定 $\exists$ 一条 path

walk 之间有重复点,

重复点之间的点都删除.



剩下所有点都不重复

有向图 G 是强连通的 $\Leftrightarrow C(\overrightarrow{s_1, s_2}) \neq \emptyset$ 且 $C(\overrightarrow{s_2, s_1}) \neq \emptyset$

$\Rightarrow$ 反证. 假设 $\exists s_1, s_2$, st $C(\overrightarrow{s_1, s_2}) = \emptyset$.

取 $v_1 \in s_1, v_2 \in s_2$, $\exists$ 从 v_1 到 v_2 的 walk, 证明其中有一条边 $e \in C(\overrightarrow{s_1, s_2})$

同上用归纳假设, 可证得 $\longrightarrow$

★ 一个平衡有向图，它是强连通 $\Leftrightarrow$ 连通。

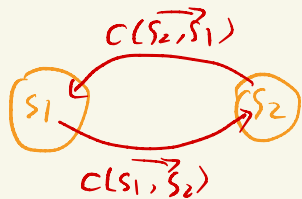
利用 Cut.

目标: $\forall s_1 \cup s_2$ st $\begin{cases} C(s_1, \overrightarrow{s_2}) \neq \emptyset \\ C(s_2, \overrightarrow{s_1}) \neq \emptyset \end{cases}$

已知连通 $\Rightarrow \forall s_1 \cup s_2 \quad C(s_1, \overrightarrow{s_2}) \cup C(s_2, \overrightarrow{s_1}) \neq \emptyset$

反证: 若该图不是强连通, 则 $\exists s_1 \cup s_2$.

st $C(s_1, \overrightarrow{s_2}) \neq \emptyset \quad C(s_2, \overrightarrow{s_1}) = \emptyset$ (不妨设)



入度等于出度

因为该图平衡 $\sum_{v \in V(s_1)} \deg^+_G(v) = \sum_{v \in V(s_1)} \deg^-_G(v)$

考虑子图 s_1 : $\sum_{v \in V(s_1)} \deg^+_{s_1}(v) = \sum_{v \in V(s_1)} \deg^-_{s_1}(v)$

只考虑在 s_1 中的边贡献的出度与入度.

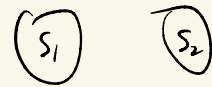
两者相减: $|C(\vec{s_1}, \vec{s_2})| = |C(\vec{s_2}, \vec{s_1})|$
 $\Rightarrow$ 不存在一个为空, 另一个非空的情况, 矛盾.

有无向图 G , 点集 $v_1, \dots, v_n$, 要求 $\deg(v_1) \leq \deg(v_2) \leq \dots \leq \deg(v_n)$

$1 \leq k \leq n-1 - \deg(v_n)$ ^t, $\deg_G(v_k) \geq k$, 证明 G 是连通的.

目标: 任意 cut 非空

反证: $\exists$ 一个 cut 为空, $S_1 \cup S_2$



若 $v_k \in S_1$, 则 $v_k \cup \underbrace{N(v_k)}_{v_k \text{ 相邻点}} \subset V(S_1)$

$$\therefore |S_1| \geq 1 + \deg(v_k)$$

不妨假设 $v_n \in S_1$.

$$|S_1| \geq 1 + \deg(v_n) \geq n - \deg(v_n)$$

$$\therefore |S_2| \leq \deg(v_n)$$

$$\text{A } |S_2| \leq n-1-\deg(v_n)$$

$$\text{设 } m = |S_2|, \quad \therefore \forall v_i \in S_2, \quad \deg(v_i) \leq m-1$$

$$\text{那 } v_m \text{ 呢? } m \leq n-1-\deg(v_n) \quad \deg(v_m) \geq m \quad \Rightarrow \quad \therefore v_m \text{ 要在 } S_1 \text{ 里面, } v_m \in S_1.$$

$$S_2 \text{ 中最多有 } v_1, v_2, \dots, v_{m-1} \text{ 个点, 也即 } |S_2| \leq m-1.$$

有向图 $D=(V, E)$, $|V|=n$, $|E|=m$, 若 $m > (n-1)^2$, 则该图强连通

①反证该图不连通 , $\exists$ cut $S_1 \cup S_2$, st $C(\overrightarrow{S_1, S_2}) = \emptyset$

$$|S_1|=k \quad |S_2|=n-k \quad |C(\overrightarrow{S_1, S_2})|=k(n-k)$$

$$m \leq n(n-1) - k(n-k) \leq n(n-1) - (n-1) = (n-1)^2$$

②直接证明: 归纳法. 考虑 $(n-1)$ 个点成立. 即当 $m > (n-2)^2$ 时该图强

当 n 个点时, 取一个点 s_1 , 考虑 $C(s_1, s_2)$

○ s_1 s_2 如果 $|C(s_1, s_2)| \geq 2(n-1)$ 时, 成立.

当 $|C(s_1, s_2)| \leq 2(n-1)-1$

$$E(S_2) = m - |C(s_1, s_2)| \geq (n-1)^2 + 1 - (2(n-1)-1) = (n-2)^2 + 1$$

$\therefore S_2$ 内部强连通.

若 s_1 到 s_2 存在双向边, 则原图 G 强连通.

否则 $|C(s_1, s_2)| \leq n-1$ (只有单向) 而 $E(s_2) \leq (n-1)(n-2)$

与 $m = n-1 + (n-1)(n-2) = (n-1)^2 > (n-1)^2$ 矛盾.

$\therefore s_1$ 到 s_2 存在双向边, 原图强连通.

欧拉回路 Eulerian Circuit (边不重复)

↓
a Circuit contain all edges

连通

有向图, 存在 Eulerian Circuit $\Rightarrow \forall v \in V, \deg^+(v) = \deg^-(v)$

$v_1 \quad v_2 \quad \dots \quad v_m \quad v_1$

归纳: 对 m 进行归纳, 设 $m \leq t$ 时结论成立.

$m = t+1$ 时, 如果 $\forall$ 顶点 v_i 在 C 中只出现一次. 则显然 $\deg^+(v_i) = \deg^-(v_i) = 1$

若 $\forall v \in V, \deg^+(v) = \deg^-(v) \Rightarrow$ 则该图存在 Euler Circuit.

① $\forall v \in V, \deg^+(v) = \deg^-(v) = 1$, 可证得

② $\forall v \in V, \deg^+(v) = \deg^-(v) = k$ 设 v 有 $e_1, e_2, \dots, e_k$ 出边
 $f_1, \dots, f_k$ 入边.

作如下操作. 分裂 v 为 $v_1, v_2, \dots, v_k$.

归纳假设: 从 G 中去掉一个 circuit C , 得到 $G' = G \setminus C$.

G' 依然满足, 其中每一个点出度 = 入度. $E(G') < E(G)$

设 $|E(G)| \leq m$ 时, 若 $\forall v \in V, \deg^+(v) = \deg^-(v)$ (假设)

则 G 中存在 Eulerian Circuit.

考虑 $|E(G)| = m+1$ 时, $|E(G')| \leq m \Rightarrow G'$ 中存在 Eulerian Circuit. C'
(G' 是从 G 中去掉一个 Circuit)

$C' + C \Rightarrow G$ 中的 Eulerian Circuit.

(因为 G 连通, 所以 C 与 C' 间必有相同元素, 故 $C + C'$ 构成 G 的 EC)

反证: 如果不成立, 则存在一个边数最少的图满足条件且无 EC.

那么若该图中存在 circuit C , $G \setminus C$ 依然满足条件且无 EC.

但是 $G \setminus C$ 边数更少, 故与题矛盾.

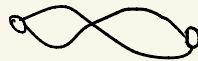
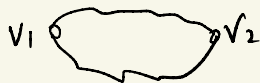
☆ 给定简单连通有向图, $\forall v \in V, \deg^+(v) = \deg^-(v)$, 则 G 中 $\exists$ Circuit.

$$P_1: v_1 \rightsquigarrow v_2$$

$$P_2: v_2 \rightsquigarrow v_1$$

$$P_1: v_1 u_1 u_2 \dots u_k v_2$$

$$P_2: v_2 w_1 w_2 \dots w_r v_1$$



(u_i 是最靠近 v_1 的在 P_2 中重复出现的点)

$$\text{取 } v_1 u_1 \dots u_i \dots v_1$$

故其为 Cycle (无重复点)

故必有 Circuit.

($v_1 \sim u_i$ 无重复点, $u_i \sim v_1$ 也无重复点)

(同时两条路径中没有重复点, 因为 u_i 是最靠近 v_1 的重复点)

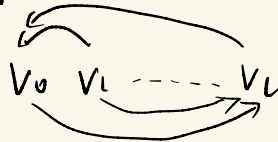
Cycle 的长度是否有范围?

考虑一个简单有向图: $s^+ = \min_{v \in V} \{ \deg^+(v) \}$ $s^- = \min_{v \in V} \{ \deg^-(v) \}$ $k = \max \{ s^+, s^- \}$

则一定存在一个长至少为 $k+1$ 的 Cycle.

先证: 有长度至少为 k 的 Path.

proof: 取图中最长一条 Path: $v_0 \rightarrow v_1 \rightarrow \dots \rightarrow v_l$



最长: v_0 的入边点均在 Path 里 $\Rightarrow l \geq \deg^-(v_0)$
 v_l 的出边点均在 Path 里 $\Rightarrow l \geq \deg^+(v_l) \Rightarrow l \geq k$

考虑 cycle: 两种情况

$v_i \rightarrow v_0 \rightarrow v_1 \rightarrow \dots \rightarrow v_i$ (i 尽可能大) $i \geq \deg^-(v_0)$, 假设 $v_1 \dots v_i$ 与 v_0 均有边

$v_j \rightarrow \dots \rightarrow v_l \rightarrow v_j$ (j 尽可能小) $j \leq l - \deg^+(v_l)$

故 Cycle 长度至少为 $k+1$

对于简单连通无向图 G , G 存在 Eulerian Circuit $C \iff \forall v \in V, \deg(v)$ 为偶数.

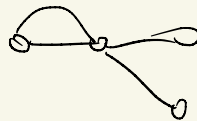
$\Rightarrow$: G 中存在 E.C., 沿着 EC 的方向给边定向. $G \xrightarrow{G} \vec{G}$
变为有向图. $\therefore \deg_G(v) = \deg_{\vec{G}}^+(v) + \deg_{\vec{G}}^-(v) = 2 \deg_{\vec{G}}^+(v)$

$\Leftarrow$: 对 G 找一个 cycle, 找到后去掉.

proof: G 中找一条最长 Path $v_0 \overset{\curvearrowright}{v_1} \dots v_L$

v_0 的邻接点一定在 Path 中, 故存在 cycle.

同时, cycle 至少为 $\min_{v \in V} \deg(v) = \delta \quad (\delta \geq 2)$



每个点遍历一次 $\Rightarrow$ hamtonian cycle

如果 G 存在 H.C, 则 $\forall S \subseteq V$, 考虑 $G \setminus S$, 从 G 中取掉 S 中的点以及它们的邻边, 则

$$w(G \setminus S) \leq |S| \quad (\text{Hamiltonian cycle 的必要条件})$$

连通分支 的个数,

C 为 G 的 H.C

proof: $w(G \setminus S) \leq w(C \setminus S) \leq |S|$

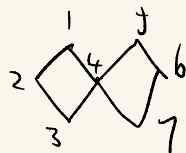
$\downarrow$
显然, 因为 G 和 C 顶点数相同, 而 C 中边数更少

$$w(C \setminus S) \leq |S| \Rightarrow$$



减几刀, 连通分支个数必然少于 $|S|$

① 一个连通图中的点 v 叫做割点，
如果 $w(G|v) > w(G)$



4 就是一个割点

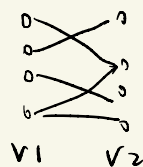
根据上一页结论，若有 Hamiltonian cycle $\Rightarrow G$ 中不存在割点。

★ 一个无向图 $G=(V, E)$ 是一个二部图，是指 $V=V_1 \cup V_2$ ($V_1 \cap V_2 = \emptyset$)

st. $\forall e \in E, e=(u_1, u_2) \quad u_1 \in V_1, u_2 \in V_2$

结论：包含奇数个顶点的二部图，一定不存在 Hamiltonian cycle.

proof: ① 若有在 Hamiltonian cycle C



$C: \quad k_1 \quad k_2 \quad \dots \quad k_L$
 $\quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$
 $\quad v_1 \quad v_2 \quad v_1$

C 中 v_1, v_2 点必须接替出现。

$\therefore \#V_1 = \#V_2$

① 假设 $|V_1| < |V_2|$ $S = V_1$

$W(G \setminus V_1) = |V_2| > |S| = |V_1|$ 违背必要条件 $\therefore$ 图中不存在 H.C.

Dirac 定理: 对于简单图 G , 令 $\delta = \min_{x \in V} \{\deg(x)\}$, 若 $\delta \geq \frac{|V|}{2}$, 则 G 中存在 H.C.

结论: 考虑二部图 $G = (V_1 \cup V_2, E)$, $|V_1| = |V_2|$, 并且 G 是完全二部图.

则 G 中一定存在 H.C.

$(\forall u_1 \in V_1, u_2 \in V_2, (u_1, u_2) \in E)$

proof: $\delta = \frac{|V|}{2}$



图的同构: 点一一对应, 点间的边也一一对应

图的矩阵表示: 邻接矩阵.

G (无向), a_{ij} 表示 $i \rightarrow j$ 有几条边. $\bigcirc$ 代表 $a_{11} = 2$

关联矩阵 M .



$m_{ij} = \begin{cases} 1, & v_i \text{ 是 } e_j \text{ 一个端点} \\ 2, & \text{---} \text{---} \text{---} 2 \text{ 个端点} \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (\text{无向})$

$m_{ij} = \begin{cases} 1, & e_j \text{ 以 } v_i \text{ 为起点} \\ -1, & e_j \text{ 以 } v_i \text{ 为终点} \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (\text{有向})$

图 G_1, G_2 , 邻接矩阵 $A(G_1), A(G_2)$

G 与 G_2 同构 $G_1 \cong G_2 \Rightarrow A(G_1), A(G_2)$ 相似

对 V 无向图, 考虑对角线矩阵 $D_{n \times n}$, $D_{ii} = \deg(v_i)$

对 V 无向图 G , 考虑它的任一定向得到的有向图 D , 其关联矩阵为 M .

$$\underline{D_{n \times n} - A(G) = M \cdot M^T}$$

L_{ii} : 顶点 v_i 除了 loop 之外的度数

$L_{ij} (i \neq j)$: -1 : 顶点 v_i 和 v_j 的边数

proof: $M \cdot M^T = B \quad B_{ij} (i \neq j) = \langle M_i, M_j \rangle$

$$B_{ij} = \sum_{k=1}^m M_{ik} M_{jk} = \begin{cases} 0 \\ -1 \end{cases}, \text{ 若这条边以 } v_k, v_j \text{ 为起始和终点.}$$

$$B_{ii} = \sum_{k=1}^m m_{ik}^2 = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}, \text{ 即这条边以 } v_i \text{ 为一个端点}$$

Tree

连通的没有 cycle 的图.

性质: $T = (V, E) \Rightarrow |V| = |E| + 1$.

proof: 归纳法: 对 $|V|$ 大小归纳.

① $|V| = 1 \Rightarrow \text{Yes}$

② 假设 $|V| \leq k$ 时, 成立.

$|V| = k+1$ 时, 假设不存在 $\deg(v) = 1$ 的点,

$\Rightarrow \delta = \min_{v \in V} \{\deg(v)\} \geq 2 \Rightarrow \exists \text{ cycle. 矛盾.} \quad \therefore \exists \deg(v) = 1 \text{ 的点 } v.$

删去 v , $|E|=k \Rightarrow \dots$ 故成立.

反过来, 对于简单连通图 $G=(V, E)$, 若 $|V|=|E|+1 \Rightarrow G$ 是树.

proof: $|E| = \frac{\sum_{v \in V} \deg(v)}{2}$ 若 $2 \geq 2 \Rightarrow |E| \geq |V|$ 矛盾.

故 $\exists$ 一个度数为 1 的点.

数学归纳法: ① $|V|=k$ 时, $|V|=|E|+1 \Rightarrow G$ 是 tree

② $|V|=k+1$ 时, G 中 $\exists v$, st $\deg(v)=1$. 设 e_0 是 v 连着的边.

$$G' = G \setminus (e_0 \cup v) \quad |V(G')| = |V| - 1 \quad |E(G')| = |E| - 1.$$

$\Rightarrow G'$ 是 tree.

假设 G 不是 tree, 则一定存在 cycle. C .

若 $e_0 \notin C$, 则 $C \subseteq G'$, G' 存在 cycle. 矛盾.

$v_0 \in C$, $\deg(v_0) = 2 \neq 1$. 矛盾.

$\therefore G$ 是 TREE.

考虑集合 $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$, 任取 $[n]$ 的 n 个子集 $A_1, A_2, \dots, A_n$ (两两不同),

一定存在某 $i \in [n]$, st $A_1 \setminus \{i\}, A_2 \setminus \{i\}, \dots, A_n \setminus \{i\}$ 两两不同.

proof: 反证. 如果结论不成立的话,

则 $\forall i \in [n]$, $\exists A_s \triangle A_t = \{i\}$ (视为在 A_s 和 A_t 之间连上一条为 i 的边)

$A_1, \dots, A_k$ (k 个)

$1, 2, \dots, n$ (n 条边)

($k \leq n$)

故该图有 k 个顶点, n 条边 $\Rightarrow$ 一定存在 cycle.

不妨令 $A_1 \Delta A_2 = \{v_1\}$ $A_2 \Delta A_3 = \{v_2\}$ $\dots$ $A_s \Delta A_{s+1} = \{v_s\}$

($v_1 \neq v_2 \neq \dots \neq v_s$)

$$A_1 \Delta A_s = ? \supseteq \{v_1, v_s\}$$

$\therefore$ cycle 那条边至少有两个元素, 矛盾

★ G 是 Tree $\Leftrightarrow G$ 是连通的, 且 $\forall e \in E, W(G|e) = 2$.

proof: $\Rightarrow$ ① 对 $\forall$ 连通图 $G, \forall e \in E, W(G|e) \leq 2$

proof: 反证, 若 ≥ 3 , 则无法加一条边使它连通

故 $W(G|e) \leq 2$

不妨令 $W(G|e) = 1 \Rightarrow$ 则 $G|e$ 是连通的.

设 e 两头端点为 u 和 v , $G|e$ 中 u 和 $v \exists$ path.

故 G 中, 加入 e 后, u 和 $v \exists$ cycle.

⇒ 任意的 Tree T ，加上一条不属于 T 的边，得到图 T' ，则 T' 一定 $\exists$ cycle.

Bridge (桥): 连通图 G 中的一条边 e ，被称作桥或割边，st $w(G|e) = 2$.

由上，树中每一条边均为 bridge.

⇐: 如果一个连通图 G ， $\forall e \in E$ 是 bridge $\Rightarrow G$ 是 Tree.

proof: 反证: 若不是 tree，则 $\exists$ cycle C .



一个图 $G=(V,E)$ 的子图 $G'=(V',E')$, 被称为 spanning Subgraph 是指 $V'=V$.

如果图 G 的 spanning subgraph 是 tree, 则称 G' 是 G 的 Spanning Tree.

☆ 一个图 G 有 Spanning Tree $T \iff$ 该图连通.

" $\Rightarrow$ " $w(G) \leq w(T) = |$

" $\Leftarrow$ " BFS

对于连通图 G , 考虑 $\forall x, y$, 令 d 是 $d_G(x, y)$, G 存在一个 Spanning Tree T , st

$d_T(x, y) = d_G(x, y)$ (最短)

对于连通图 G , $\forall x$, $\exists$ spanning tree T , st $\forall y \in V$.

$$\text{st } d_T(x, y) = d_G(x, y)$$

平面图, 平图

一个图叫作平图, 是指一个画在平面上的图且边不存在交叉.

平面图: 可以在平面上画成一个平图.

任意平图, 把平面分割成若干个连通区域 $\rightarrow$ 称作面.

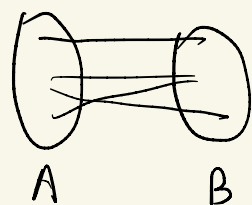
对于面, 它的边界是这个面包含的边的集合.

对于面, 它包含的点称为其顶点.

每个点作为面的顶点出现次数 $\leq \deg(v)$.

图的匹配问题

二部图



图的一个匹配是指

存在一组边的集合, 使得任何两个边没有交点.

完美匹配: 一组边集合, 使得每个点都有一条边相连. (子图)

对于二部图, 存在完美匹配, 必要条件: ① $|A|=|B|$

② $\forall$ 顶点, 度数 ≥ 1

③ $\forall S \subseteq A$ (S 是子集)

$$|N(S)| \geq |S|$$

结论: 对于二部图 $G=(A \cup B, E)$

G 存在完美匹配.

$$\Leftrightarrow \forall S \subseteq A \text{ or } B \quad |N(S)| \geq |S|$$

$\Rightarrow$ 显然

$\Leftarrow$: 采用归纳, 对个数进行归纳.

① $n=1$ 时 显

② $n=k$ 时 成立

$n=|A|=|B|=k+1$ 时,

下证明 $\forall e=(u,v) \in E$, 有 ① $G \setminus \{e\}$ 有完美匹配

② $G \setminus \{u,v\}$ 有完美匹配.

对于①, 若 $G \setminus \{e\}$ 无完美匹配,

则 $\exists S \subseteq A$, st $|N(S)| < |S|$.

$\because$ 若 $u \notin S$, 则 $G \setminus \{e\}$ 后, S 不减少

$\exists u \in S$, st $|N(S)| < |S|$